Université Paris Diderot (Paris 7)
L1 - Sciences Exactes

MT1 MM1
2010–2011

Examen du 7 janvier 2011

Durée : 3 heures.

SECTION A

Amphis 1, 4 et 5

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Exercice 1.
Déterminer les nombres complexes z tels que : $z^3 = 8i$ sous forme polaire, puis sous forme algébrique.

Exercice 2.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x - 2y - 4z = 0\big\}$.

1. Quelles sont les propriétés qu'une partie P de $\mathbb{R}^3$ doit satisfaire pour être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Puis vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en montrant qu'elle satisfait ces propriétés.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F ; en déduire la dimension de F.

Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les trois vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 6, 1),\ v_2 = (1, 3, -5) \text{ et } v_3 = (2, 7, -8).$$

3. Justifier *sans aucun calcul* que la dimension de G vérifie : $2 \leqslant \dim G \leqslant 3$.
4. Démontrer que la famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas libre. *Sans aucun calcul supplémentaire*, extraire de cette famille une base $\mathcal{B}_2$ de G, en justifiant soigneusement qu'il s'agit bien d'une base de G. Préciser la dimension de G.
5. Montrer que G est défini par l'équation $11x - 2y + z = 0$. (Autrement dit, montrer que les vecteurs de G sont exactement les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $11x - 2y + z = 0$.)
6. Déterminer une base $\mathcal{B}_3$ du sous-espace vectoriel $F \cap G$; en déduire la dimension de $F \cap G$.
7. Soit $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs obtenue en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$. Déterminer sans calculs supplémentaires si $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.

a) Donner la définition exacte (en termes de ε) de la formule : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

$$(1)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8} \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1 + x + x^2} - 1\right).$$

c) Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$\left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad \text{pour tout } x \neq 0. \end{array}\right.$$

Puis calculer sa dérivée f' et étudier la continuité de f' sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

1. Rappeler les énoncés du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème du maximum.
2. Existe-t-il une application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0,+\infty[) = [-1,0] \cup [1,+\infty[$?
3. Existe-t-il une application $f : [0,1] \to [0,+\infty[$ continue et surjective ?

Exercice 5.
On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = e^x + e^{-x} + 2$.

1. La fonction F est-elle paire ou impaire ? Justifier votre réponse.
2. Après avoir justifié la continuité et la dérivabilité de F, étudier ses variations. Puis, déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{F(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.

On note f la restriction de F à l'intervalle $[0,+\infty[$.

3. Montrer que l'application f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[4,+\infty[$ et que l'application réciproque $f^{-1} : [4,+\infty[\to [0,+\infty[$ est continue.
4. Montrer que l'application réciproque f^{-1} est dérivable sur $]4,+\infty[$. Est-elle dérivable en 4 ?
5. Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$: $f'(x) = \sqrt{f(x)\big(f(x)-4\big)}$.
6. En déduire que la dérivée $(f^{-1})'$ de f^{-1} vérifie pour tout $y > 4$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{y(y-4)}}$$

Exercice 6.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n)\,. \end{array}\right.$$

On note $I = [0, \frac{1}{2}]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I.
2. Montrer que si la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite appartient à I et est solution de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$.
3. Déterminer l'unique solution dans l'intervalle I de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$.
   On note α ce nombre.
4. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x-y|$$

5. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.
6. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
8. Comment obtenir, à l'aide des résultats précédents, une approximation de α par un nombre rationnel avec une erreur inférieure à 10^{-3} ?